

TD 3

Exercice 1. (Décomposition LDL^t et LL^t)

1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ symétrique définie positive admet une décomposition LDL^t .
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer la décomposition LDL^t de A . Existe-t-il une décomposition LL^t de A ?
3. Écrire l'algorithme de décomposition LDL^t . La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ admet-elle une décomposition LDL^t ?

Exercice 2. (Décomposition LL^t)

Montrer que la matrice suivante est symétrique définie positive et donner sa factorisation de Cholesky.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (Décomposition LU et LL^t)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la décomposition LU de A .
2. Donner la décomposition LL^t de B .

Exercice 4. (Méthode de Gauss)

Résoudre les systèmes linéaires suivants avec la méthode du pivot de Gauss.

1.
$$\begin{cases} x + y + z &= 6/5 \\ 3x - 2y - z &= 0 \\ 2x + y + \frac{6}{5}z &= -9/5 \end{cases}.$$
2.
$$\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ x + 2y + z + w &= 0 \\ x - y + w &= 1 \\ 2x - 3y + w &= 4 \end{cases}.$$
3.
$$\begin{cases} x + y - 2z &= 1 \\ x + z &= 0 \\ -2x + y - z &= -3 \end{cases}.$$